Géométrie plane

Correction

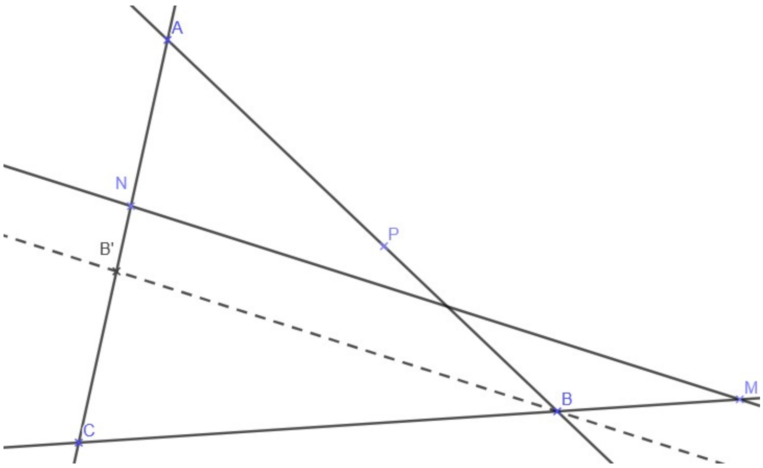
Théorème 18: (Menelaüs).

Soit A, B et C trois points non alignés. Soit M, N et P trois points appartenant respectivement à (BC), (AC) et (AB) distincts de A, B et C.

Les points M, N et P sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

Démonstration:

Soit le point B′ intersection de la parallèle (MN) passant par B et de (AC).



1. Montrons que si les points M, N et P sont alignés alors $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

   On applique le théorème de Thalès dans deux configurations :

   - Dans le triangle CMN coupé par (BB'), tel que (CM)//(BB')
     $\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NB'}}$ d'où $\overline{NB'} = \frac{\overline{NC} \times \overline{MB}}{\overline{MC}}$.
   - Dans le triangle ABB' coupé par (NP), tel que (NP)//(BB')
     $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB'}}$ d'où $\overline{NB'} = \frac{\overline{NA} \times \overline{PB}}{\overline{PA}}$.

   On en déduit : $\frac{\overline{NA} \times \overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{NC} \times \overline{MB}}{\overline{MC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

2. Réciproquement, montrons que si $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$ alors les points M, N et P sont alignés.
   - Montrons que (NP) n'est pas parallèle à (BC) par l'absurde.

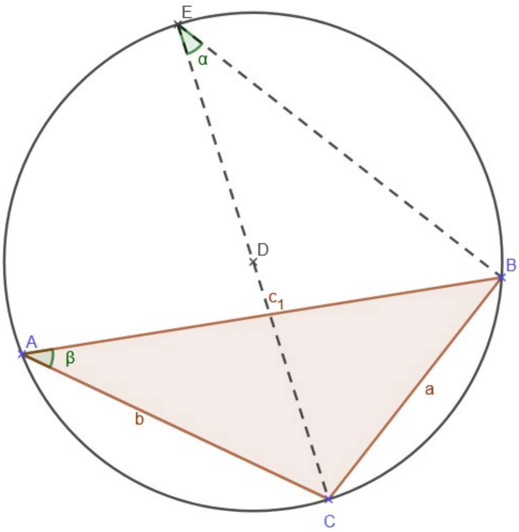
     On aurait alors dans le triangle ABC coupé par (NP) : $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ et donc $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = 1 \Leftrightarrow \overline{MB} = \overline{MC}$. Ce qui implique que B = C, ce qui est impossible.

     Donc les droites (NP) et (BC) sont sécantes.
   - Posons X leur point d'intersection.

     D'après ce qui précède, $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

     D'où $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$ ce qui implique que X=M.

   Donc les points sont alignés.



<u>Théorème 19</u>: (Formule (ou loi) des sinus).

Si R est le rayon du cercle circonscrit à ABC, alors :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} = 2R$$.

Démonstration:

Une première possibilité est de raisonner comme pour la démonstration du théorème 3 (la réciproque de l'angle inscrit).

Ici nous allons proposer une deuxième façon de démontrer ce résultat.

Dans la configuration ci-dessus, posons F le point du cercle tel que [FC] est un diamètre.

- Considérons les angles inscrits $\widehat{CFB}$ et l'angle au centre $\widehat{BAC}$. Ils interceptent le même arc, d'où $\widehat{CFB} = \widehat{BAC}$.

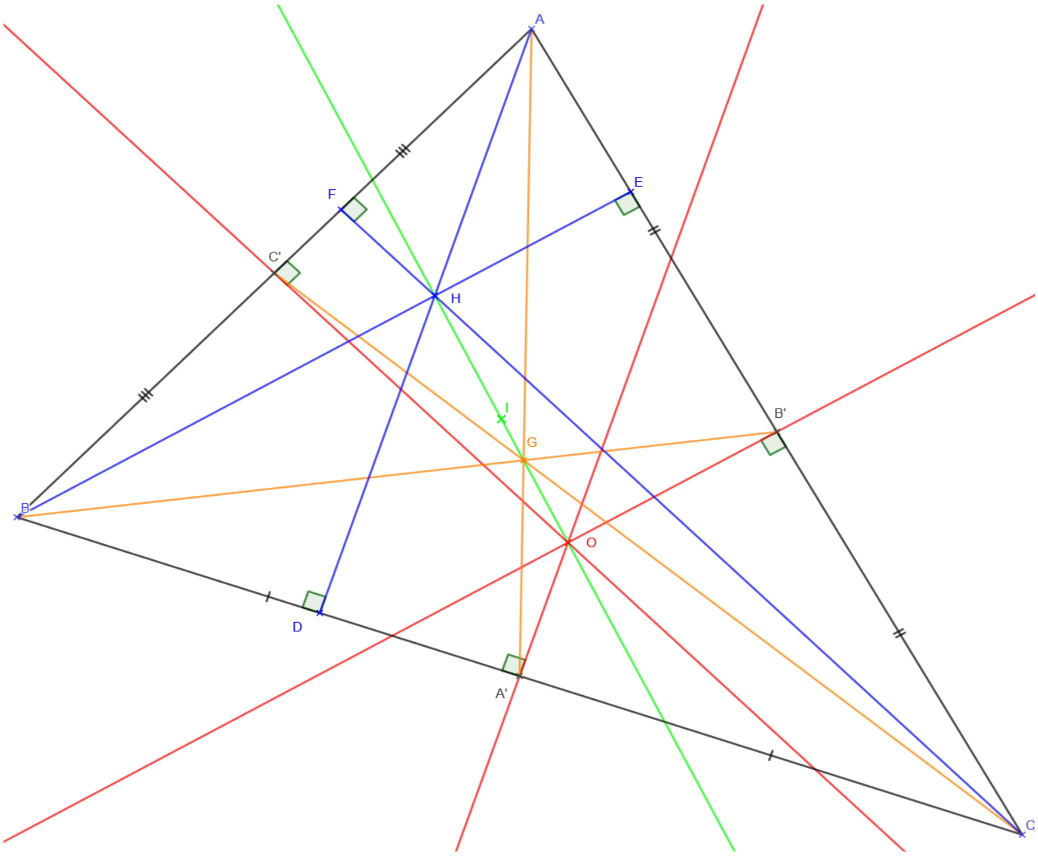
- Considérons l'angle inscrit $\widehat{FBC}$ et l'angle au centre $\widehat{FDC}$. Ils interceptent le même arc, d'où $\widehat{FDC}=2\times\widehat{FBC}\Leftrightarrow\widehat{FBC}=\frac{1}{2}\times 180=90°$ FBC est donc un triangle rectangle en B.

- On a donc $\sin(\widehat{BAC})=\sin(\widehat{BFC})=\frac{BC}{FC}=\frac{a}{2\text{R}}$ d'où $\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})}=2\text{R}$.

On prouve les autres égalités de la même façon.

<u>Théorème 16</u> :

Les points G, H et O sont alignés. Dans le cas où ils ne sont pas confondus, ils définissent une droite appelée droite d'Euler.



Démonstration:

Soit ABC un triangle. On appelle A', B', C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$; D, E et F les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A, B et C et G le centre de gravité du triangle ABC.

1) On note O le centre du cercle C_1 circonscrit au triangle ABC et H le point défini par $\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC et que $\vec{OH}=3\vec{OG}$.

Introduisons le point G dans l'égalité :

$$\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{OG}+\vec{GA}+\vec{OG}+\vec{GB}+\vec{OG}+\vec{GC}=3\vec{OG}+\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=3\vec{OG}\ .$$

Car G est le centre de gravité du triangle, c'est donc l'isobarycentre de A, B et C.

Qu'en déduit-on pour les points O, G et H ?

Les points O, G et H sont alignés.

2) On note I, M , N et P les milieux respectifs des segments $[OH]$, $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$. On appelle C_2 le cercle de centre I de rayon la moitié du rayon du cercle C_1.

Démontrer que $\vec{\mathrm{IM}}=\frac{1}{2}\vec{OA}=-\vec{IA'}$.

$$\vec{\mathrm{IM}}=\vec{IH}+\vec{HM}=\frac{1}{2}\vec{OH}+\frac{1}{2}\vec{HA}=\frac{1}{2}\vec{OA}\ .$$

De plus $\vec{OH}=3\vec{OG}$ et $\vec{OI}=\frac{1}{2}\vec{OH}=\frac{3}{2}\vec{OG}$, d'où $\vec{GI}=\vec{OI}-\vec{OG}=\frac{1}{2}\vec{OG}$.

En outre, G barycentre du système {(A;1);(A';2)} donc $\vec{GA}+2\vec{GA'}=\vec{0}$.

Donc $\vec{OA}=\vec{OG}+\vec{GA}=-2.\vec{IG}-2.\vec{GA'}=-2.\vec{IA'}$

En déduire que le segment $[MA']$ est un diamètre du cercle C_2.

On a $\vec{\mathrm{IM}}+\vec{IA'}=\vec{0}$. Donc I est le milieu de [MA'], d'où le résultat.

3) Montrer que le point D appartient au cercle C_2.

MDA' est un triangle rectangle de diamètre son hypoténuse. Son cercle circonscrit admet donc $[MA']$ comme diamètre. Il s'agit donc du cercle C_2. D'où $D\in C_2$.

4) Donner neuf points situés sur le cercle C_2 (il s'agit naturellement de nommer neuf points de la figure définis sans référence au cercle …)